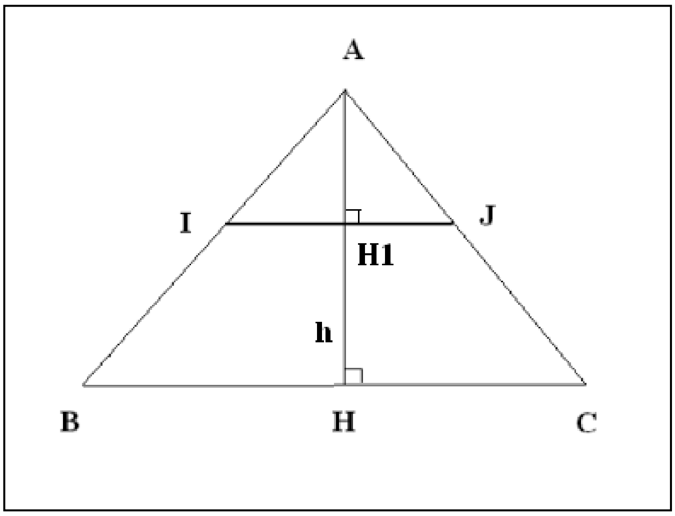
Le théorème de Thalès.

1) Relation des sinus dans un triangle quelconque :



ABC est un triangle quelconque et (AH) est la hauteur issue du sommet A et relative au côté [BC].
On notera AH = h
On posera : BC = a, AC = b et AB = c.
L'angle BAH sera noté α et l'angle CAH sera noté β.
(IJ) est parallèle à (BC).

On représentera les angles du même nom que le sommet en gras ou s'il y a ambiguïté par sa dénomination complète.

Dans le triangle rectangle AHB on a : $\sin B = \dfrac{h}{c}$ (1)

Dans le triangle rectangle AHC on a : $\sin C = \dfrac{h}{b}$ (2)

Les produits en croix dans (1) et (2) conduisent à : $c \sin B = b \sin C = h$

Soit $\dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$ (3)

On procède de même en prenant une autre hauteur, par exemple, celle issue de C :

On obtient : $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b}$ (4)

En regroupant les relations (3) et (4), on obtient ce que l'on appelle la relation des sinus dans un triangle quelconque :

$$\boxed{\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}}$$

2) <u>Enoncé du théorème de Thalès</u>

Soient (AB) et (AC) deux droites sécantes en A, soient I$\in$ (AB) et J$\in$ (AC) et si les droites (IJ) et (BC) sont parallèles alors :

$$\boxed{\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC} = \frac{IJ}{BC}}$$

<u>Démonstration du théorème de Thalès</u> :

La relation des sinus nous permet d'écrire :

Dans le triangle AIJ : $$\frac{\sin A}{IJ} = \frac{\sin I}{AJ} = \frac{\sin J}{AI} \qquad (7)$$

et dans le triangle ABC : $$\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin B}{AC} = \frac{\sin C}{AB} \qquad (8)$$

Les angles **I** et **B** sont égaux ainsi que les angles **J** et **C** car ils occupent la position d'angles correspondants [les droites (IJ) //(BC) sont respectivement coupées par les sécantes (AB) et (AC)] donc en considérant les deux premiers termes dans les expressions (7) et (8) on peut écrire :

$$\frac{\sin A}{IJ} = \frac{\sin I}{AJ} \quad (7') \quad \text{et} \quad \frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin I}{AC} \quad (8')$$

En faisant les produits en croix dans chaque expression, on obtient :

$$AJ \sin A = IJ \sin I \quad (9) \qquad \text{et} \qquad AC \sin A = BC \sin I \qquad (10)$$

On ne change pas une égalité en divisant chaque membre de l'égalité par un même nombre, on va donc diviser le premier membre de l'égalité (9) par $AC \sin A$ et le deuxième terme par $BC \sin I$, on obtient alors :

$$\frac{AJ}{AC} = \frac{IJ}{BC} \qquad (11)$$

En considérant maintenant les deux derniers termes dans les expressions (7) et (8), on obtient :

$$\frac{\sin I}{AJ} = \frac{\sin J}{AI} \quad (7'') \quad \text{et} \quad \frac{\sin B}{AC} = \frac{\sin C}{AB} \quad (8'')$$

En faisant les produits en croix et en procédant de la même manière que précédemment, on obtient :

$$\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC} \quad (12)$$

On obtient finalement le théorème de Thalès en écrivant l'égalité des expressions (11) et (12), soit :

Soient (AB) et (AC) deux droites sécantes en A, soient I$\in$ (AB) et J$\in$ (AC) et si les droites (IJ) et (BC) sont parallèles alors :

$$\boxed{\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC} = \frac{IJ}{BC}}$$

Il existe d'autres configurations pour les points I et J où le théorème de Thalès s'applique (voir le cours).

3) <u>Variante de la démonstration du théorème de Thalès</u> :

Dans les triangles AH_1I et AHB: $\cos\alpha = \dfrac{AH_1}{AI} = \dfrac{AH}{AB}$ ➔ $\dfrac{AH_1}{AH} = \dfrac{AI}{AB}$ (5)

Dans les triangles AH_1J et AHC: $\cos\beta = \dfrac{AH_1}{AJ} = \dfrac{AH}{AC}$ ➔ $\dfrac{AH_1}{AH} = \dfrac{AJ}{AC}$ (6)

L'égalité des expressions (5) et (6) nous permet d'écrire :

$$\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC} \quad (7)$$

La relation des sinus nous permet d'écrire :

Dans le triangle AIJ : $\dfrac{\sin A}{IJ} = \dfrac{\sin I}{AJ}$ (8) et dans le triangle ABC : $\dfrac{\sin A}{BC} = \dfrac{\sin B}{AC}$ (9)

Or les angles **I** et **B** sont égaux car ils occupent la position d'angles correspondants [(IJ) //(BC) coupées par la sécante (AB)] donc les expressions (8) et (9) conduisent à :

$$\frac{\sin A}{IJ} = \frac{\sin I}{AJ} \quad (8') \quad \text{et} \quad \frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin I}{AC} \quad (9')$$

En faisant les produits en croix dans chaque expression, on obtient :

$$AJ \sin A = IJ \sin I \quad (10) \qquad \text{et} \qquad AC \sin A = BC \sin I \quad (11)$$

On ne change pas une égalité en divisant chaque membre de l'égalité par un même nombre, donc on va diviser le premier membre de l'égalité (10) par $AC \sin A$ et le deuxième terme par $BC \sin I$, on obtient alors :

$$\frac{AJ}{AC} = \frac{IJ}{BC} \quad (12)$$

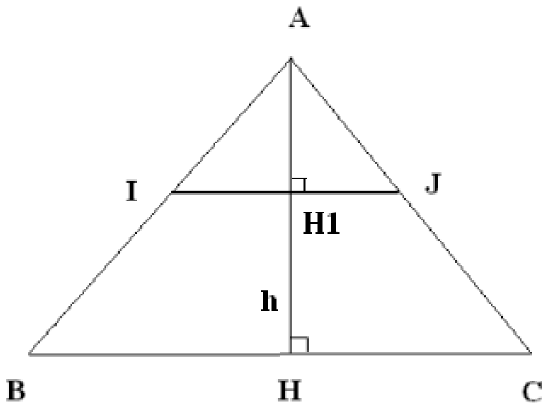
On obtient finalement le théorème de Thalès en écrivant l'égalité des expressions (7) et (12), soit :

Soient (AB) et (AC) deux droites sécantes en A, soient I∈ (AB) et J∈ (AC) et si les droites (IJ) et (BC) sont parallèles alors :

$$\boxed{\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC} = \frac{IJ}{BC}}$$

Il existe d'autres configurations pour les points I et J où le théorème de Thalès s'applique (voir le cours).

4) <u>Réciproque du théorème de Thalès</u>



Hypothèses :
ABC est un triangle quelconque et on a : $\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC}$

<u>Enoncé de la réciproque du théorème de Thalès</u>

Soient (AB) et (AC) deux droites sécantes en A, soient $I \in (AB)$ et $J \in (AC)$

Si $\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC}$ et si les points A, I, B et les points A, J, C sont dans le même ordre, alors les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.

<u>Démonstration</u>

On sait que : $\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC}$, la relation des sinus permet d'écrire :

$$\frac{\sin A}{IJ} = \frac{\sin J}{AI} \quad (13) \quad \text{et} \quad \frac{\sin B}{AC} = \frac{\sin C}{AB} \quad (14)$$

En divisant membre à membre les équations (13) et (14), on obtient :

$\frac{\sin I}{AJ} \times \frac{AC}{\sin B} = \frac{\sin J}{AI} \times \frac{AB}{\sin C}$ (15) or par hypothèse on a : $\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC}$ soit en permutant les

« extrêmes et les moyens » : $\frac{AC}{AJ} = \frac{AB}{AI}$ et l'équation (15) se réduit à : $\frac{\sin I}{\sin B} = \frac{\sin J}{\sin C}$ (16).

Les angles **I, J, B et C** sont compris entre 0 et Π/2.

- Si **I = B** alors d'après (16) **J = C**, ces angles sont en position d'angles correspondants et sont respectivement égaux, alors les droites(IJ) et (BC) sont parallèles.

- Si (IJ) n'est plus // à (BC)

  Par exemple si **I > B** alors **J <C**

  or la fonction sinus est croissante dans l'intervalle [0, Π/2] donc $\frac{\sin I}{\sin B} \rangle 1$ ➔ **J > C**, ce qui est en contradiction avec les hypothèses formulées.

- De même si **I < B** alors **J >C et on aboutit à la même contradiction pour les mêmes raisons citées précédemment.**

La seule solution envisageable est donc celle pour laquelle les droites(IJ) et (BC) sont parallèles.